# 第７講　級数

**7**

［A］　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}$

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

［B］　半径１の円を $C_1$ とする．円 $C_1$ に内接する正三角形を $T_1$，$T_1$ の内接円を $C_2$ とし，以下，自然数 $n$ に対して，円 $C_n$ に内接する正三角形を $T_n$，$T_n$ の内接円を $C_{n+1}$ と定めることとする．

円 $C_n$ の面積を $S_n$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$S_2$ を求めよ．

(2)　$S_n$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第7講　級数

7　半径1の円を$C_1$とする．円$C_1$に内接する正方形を$Q_1$，$Q_1$の内接円を$C_2$とし，以下，自然数$n$に対して，円$C_n$に内接する正方形を$Q_n$，$Q_n$の内接円を$C_{n+1}$と定めることとする．

円$C_n$の面積を$S_n$とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第７講　級数

7

［A］　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}$

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

［B］　半径１の円を $C_1$ とする．円 $C_1$ に内接する正三角形を $T_1$，$T_1$ の内接円を $C_2$ とし，以下，自然数 $n$ に対して，円 $C_n$ に内接する正三角形を $T_n$，$T_n$ の内接円を $C_{n+1}$ と定めることとする．

円 $C_n$ の面積を $S_n$ とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　$S_2$ を求めよ．

(2)　$S_n$ を求めよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求めよ．

**【答】**　［A］ (1) 発散　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) 発散　(4) $\dfrac{3}{4}$

［B］ (1) $\dfrac{\pi}{4}$　(2) $\dfrac{\pi}{4^{n-1}}$　(3) $\dfrac{4\pi}{3}$

**【解説】**　［A］ (1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ は**発散**する．

(2)　$-1<\dfrac{1}{3}<1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ は $\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$ に収束する．

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}\\&=\lim_{n\to\infty}\log(n+1)\\&=\infty\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}$ は**発散**する．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{3}{4}$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ は $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ に収束する.

［B］ (1) 半径 $R$ の円に内接する正三角形の一辺の長さを $a$ とすると，正弦定理より

$$\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R.$$

つまり $R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}a$ を得る.

次に，一辺の長さが $a$ の正三角形の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ なので，その正三角形に内接する円の半径を $r$ とすると

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{r}{2}\times 3a$. つまり $a=2\sqrt{3}\,r$ を得る.

よって $R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}\,r$ より $r=\dfrac{1}{2}R$ となる.

ここで $C_1$ の半径は 1 なので，$C_2$ の半径は $\dfrac{1}{2}$ となるので，$S_2=\pi\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ ゆえに $S_2=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

(2) (1)より $C_n$ の半径は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となるので，$S_n=\pi\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2$ ゆえに $S_n=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4^{n-1}}}$

(3) (2)の結果より $\{S_n\}$ は初項 $S_1=\pi$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列となり，$-1<\dfrac{1}{4}<1$ なので

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第７講　級数

7　半径１の円を$C_1$とする．円$C_1$に内接する正方形を$Q_1$，$Q_1$の内接円を$C_2$とし，以下，自然数$n$に対して，円$C_n$に内接する正方形を$Q_n$，$Q_n$の内接円を$C_{n+1}$と定めることとする．

円$C_n$の面積を$S_n$とするとき，$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$を求めよ．

**【答】**　$2\pi$

**【解説】**　半径$R$の円に内接する正方形の一辺の長さを$a$とすると，正方形の対角線の長さ$\sqrt{2}\,a$が円の直径$2R$に等しいので$\sqrt{2}\,a=2R$つまり$R=\frac{\sqrt{2}}{2}a$を得る．

次に，その正方形に内接する円の半径を$r$とすると円の直径$2r$が正方形の一辺の長さになるので$a=2r$を得る．

よって$R=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2r$より$r=\frac{1}{\sqrt{2}}R$となる．

ここで$C_1$の半径は１なので，$C_n$の半径は，初項１，公比$\frac{1}{\sqrt{2}}$の等比数列の一般項で$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$となる．

ゆえに$S_n=\pi\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}^2=\frac{\pi}{2^{n-1}}$となるが，$\{S_n\}$は初項$\pi$，公比$\frac{1}{2}$の等比数列となり，$-1<\frac{1}{2}<1$なので

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\pi}{1-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{2\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。